Διαφορικές Εξισώσεις 1

09/03/18

• Έστω $F: I \times V \to \mathbb{R}^n$, όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $(t,x) \to F(t,x)$. Θα λέμε ότι η F ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz εάν για κάθε $(t,x) \in I \times V$ και $(t,y) \in I \times V$, $\exists L > 0$ τέτοιο ώστε:

$$|F(t,x) - F(t,y)| \le L \cdot \|x-y\|$$

• Πρόταση:

Έστω V κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $F: I \times V \to \mathbb{R}^n$ ώστε:

$$F(t,x) = (F_1(t,x), F_2(t,x), \dots, F_n(t,x))$$

με μερικές παραγώγους $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ → συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις. Τότε η F ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz.

Απόδειξη:

Εφόσον $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ είναι φραγμένες συναρτήσεις, τότε $\sup_{(t,x) \in I \times V} \left| \frac{\partial F_i(t,x)}{\partial x_j} \right| < \infty \ \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}$

Έστω λοιπόν $M = \max_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}} \sup_{(t,x)} \left| \frac{\partial F_i(t,x)}{\partial x_j} \right| < \infty$

Κάθε συνιστώσα $F_i : I \times V \to \mathbb{R}$, $I \times V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

• Θ.Μ.Τ για συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$

Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^m$ και τέτοιο ώστε $a,b \in A$ και $E[a,b] \subseteq A$ και f συνεχής στο $E[a,b]$ και διαφορίσιμη στο $E(a,b)$

Τύπος που θα χρησιμοποιούμε

$E[a,b] = \{ z \in \mathbb{R}^m : z(t) = a+$
$t \in [0,1] \}$
με $E[a,b] \subseteq \mathbb{R}^m$

→ εδώ $t \in (0,1)$ και όχι $[0,1]$

Τότε $\exists\, c \in E(a,b)$, τέτοιο ώστε το $f(b) - f(a) = df(c)\cdot(b-a)$

→ Τύπος

$$df(c)h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(c)}{\partial x_j} h_j$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την F_i έχουμε ότι εφόσον I διάστημα και V κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Εάν $(t,x) \in I \times V$ και $(t,y) \in I \times V$ τότε αν $s_i \in [0,1]$ και $(t, x + s_i(y-x)) \in I \times V$. Οπότε υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα $s_i \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$|F_i(t,x) - F_i(t,y)| = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t, x + s_i(y-x))(y_j - x_j) \right|$$

αλλά εάν $u = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}(t, x+s_i(y-x)), \frac{\partial F_i}{\partial x_2}(t, x + s_i(y-x)), \dots, \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(t, x+s_i(y-x)) \right)$ και $v = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$

Γνωρίζω ότι $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$

Οπότε $\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(t, x+s_i(y-x))}{\partial x_j}(y_j - x_j) \right| \leq$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial F_i(t, x+s_i(y-x))}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} M^2 \right)^{1/2} \cdot |y-x| = \sqrt{n}\cdot M \cdot |y-x|.$$ Οπότε

$$|F_i(t,x) - F_i(t,y)| \leq \sqrt{n}\cdot M \cdot |y-x|$$

Άρα $|F(t,x) - F(t,y)| = |F_1(t,x) - F_1(t,y), F_2(t,x) - F_2(t,y), \dots, F_n(t,x) - F_n(t,y)| =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |F_i(t,x) - F_i(t,y)|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{n}\cdot M\cdot|x-y|)^2\right)^{1/2} =$$

$= n\cdot M\cdot|x-y|$ άρα η συνάρτηση F_i ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz με σταθερά Lipschitz $L = n\cdot M$

Πρόταση:
Εάν V ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ και
$F : V \to \mathbb{R}^n$
$(t,x) \to F(t,x)$
της οποίας οι μερικές παράγωγοι ως προς x $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}, j = 1,2,\dots,n, i = 1,2,\dots,n\right)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τότε αυτή ικανοποιεί την τοπική συνθήκη Lipschitz

Απόδειξη:
Θεωρώ ένα σημείο $(t_0,x_0)\in V$. Εφόσον το V είναι ανοιχτό υπάρχει $B((t_0,x_0),\rho) \subseteq V$. (Όμως ο $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι κανονικός χώρος δηλαδή για κάθε $z\in\mathbb{R}^{n+1}$ και U ανοιχτή περιοχή του z υπάρχει W ανοιχτό τέτοιο ώστε $z\in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$)

Επομένως υπάρχει ανοιχτή περιοχή $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\times B(x_0,r) \subseteq [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]\times\overline{B}(x_0,r) \subseteq V$

Όμως το σύνολο $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times \overline{B}(x_0, r)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
Οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ είναι συνεχείς

στο συμπαγές $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times \overline{B}(x_0, r)$ άρα είναι και φραγμένες στο $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times \overline{B}(x_0, r)$

Συνεπώς μπορώ να εφαρμόσω το Θ.Μ.Τ στο συμπαγές σύνολο αυτό και η F θα είναι Lipschitz στο σύνολο αυτό. Αυτά ισχύουν για το τυχαίο (t_0, x_0) άρα ισχύουν για κάθε $(t_0, x_0) \in V$ οπότε η F είναι τοπικά Lipschitz

Σημείωση: Οι παραπάνω προτάσεις μας δίνουν ικανές συνθήκες. (όχι αναγκαίες)

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση:
$$F(t, x) = 4t^2 + x^2$$
ορισμένη στο σύνολο $V = \{(t, x) : |t| \leq 1, |x| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Να εξετάσετε εάν η F πληρεί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο V.

Λύση:
$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x$ είναι συνεχής στο V και επιπλέον

$\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right| = |2x| \leq 2|x| \leq 2$ άρα $\dfrac{\partial F(t, x)}{\partial x}$ φραγμένη

Επιπλέον το V είναι κυρτό σύνολο, επειδή για $s \in [0, 1]$ ισχύει ότι αν $(t_1, x_1) \in V$ και $(t_2, x_2) \in V$ τότε $s(t_1, x_1) + (1-s)(t_2, x_2) =$
$= (st_1 + (1-s)t_2, x_1 + (1-s)x_2)$

οπότε έχουμε $|st_1+(1-s)t_2| \leq s|t_1| + (1-s)|t_2| \leq$
$\leq s\cdot 1 + (1-s)\cdot 1 = 1$ και

$|sx_1 + (1-s)x_2| \leq \overset{\text{ομοίως}}{\ldots} \leq 1$

έπεται ότι και $s(t_1,x_1)+(1-s)(t_2,x_2) \in V$

Άρα η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο V.

Άσκηση:

• Να δείξετε ότι αν $R_1 = \{(t,x) : |t|<1, x\in\mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και $F : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$F(t,x) = \begin{cases} x(3t-1), & \text{αν } t\geq 0 \\ x(2t-1), & \text{αν } t<0 \end{cases}$$

τότε η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο R_1.

Λύση:

• $$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \begin{cases} 3t-1, & \text{αν } t\geq 0 \\ 2t-1, & \text{αν } t<0 \end{cases}$$

οπότε $\lim_{t\to 0} \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \lim_{t\to 0^+}(3t-1) = -1 = \lim_{t\to 0^-}(2t-1)$

Άρα $\frac{\partial F}{\partial x}$ συνεχής στο R_1 και επιπλέον έχουμε

• $|t|\leq 1$, $\forall (t,x)\in R_1$ έχουμε για $t\geq 0$:
$\left|\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right| = |3t-1| \leq 3|t|+1 \leq 4$

και για $t<0$:

$$\left|\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right| = |2t-1| \le 2|t|+1 \le 3$$

Άρα $\frac{\partial F}{\partial x}$ φραγμένη στο R_1. Επιπλέον R_1 κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ (όπως πριν το δείχνουμε) οπότε η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο R_1.

• Εάν $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ και $F: D \to \mathbb{R}^n$ και $(x_0, y_0) \in D$ τότε έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

1) Εάν a, b θετικοί αριθμοί, και τέτοιοι ώστε $R_1 = \{(t,x) : |t-t_0| \le a$ και $|x-x_0| \le b\} \subseteq D$ και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο R_1 τότε η f πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο R_1.

2) Εάν a θετική σταθερά τέτοια ώστε $R_2 = \{(x,y) : |x-x_0| \le a$ και y αυθαίρετο$\}$ $\subseteq D$ και $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς και φραγμένες στο R_2 τότε η F πληροί τη συνθήκη Lipschitz στο R_2.

Άσκηση :

Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν πληρούν τη συνθήκη Lipschitz στο δοσμένο σύνολο.

1) $F(t,x) = t \cdot x^2$, $\Delta_1 = \{(t,x) : |t| \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$

Λύση :

Υποθέτω ότι η συνάρτηση F πληρεί τη συνθήκη Lipschitz (και θα καταλήξω σε άτοπο) με σταθερά Lipschitz $L>0$ στο Δ_1. Τότε

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq L|x-y| \quad \forall (t,x),(t,y) \in \Delta$$

Έστω λοιπόν $\delta>0$ και $(1,\delta) \in \Delta_1$ και $(1,\frac{\delta}{2}) \in \Delta_1$

Τότε θα είχα: $\left|F(1,\delta) - F(1,\frac{\delta}{2})\right| \leq L\left|\delta - \frac{\delta}{2}\right|$

$$\Leftrightarrow \left|\delta^2 - \frac{\delta^2}{4}\right| \leq L\left|\frac{\delta}{2}\right| = L\frac{\delta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\delta^2}{4} \leq L \cdot \frac{\delta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\delta}{2} \leq L$$

άτοπο γιατί το δ δεν είναι φραγμένο από επάνω.

↳ Έτσι θα δείχνουμε ότι δεν ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz. Ενώ για να ικανοποιεί όπως στην προηγούμενη άσκηση με την ικανή συνθήκη αλλά όχι αναγκαία!

2) $F(t,x) = e^{t} \cdot x^{2/3}$, $D = \{(t,x) : |t| \leq 1, |x| \leq 1\}$ νδο δεν τηρει την συνθηκη Lipschitz στο D

Λυση:

Υποθετουμε οτι η F τηρει τη συνθηκη Lipschitz στο D με σταθερα Lipschitz $L > 0$ (και θα καταληξουμε σε ατοπο). Τοτε:

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq L|x-y|, \forall (t,x),(t,y) \in D$$

Εστω $\delta \in (0,1]$. Τοτε τα $(0,\delta), (0,0) \in D$ και θα επρεπε:

$$|F(0,\delta) - F(0,0)| \leq L|\delta - 0|$$

$$\Rightarrow |\delta^{2/3} - 0| \leq L|\delta|$$

$$\Rightarrow 1 \leq L\delta^{1/3}$$

Ομως για $\delta \to 0$ εχω οτι $1 \leq 0$ που ειναι ατοπο. Αρα η F δεν ειναι Lipschitz στο συνολο D.

Θεώρημα: (Μονοσημαντο λυσεων Π.Α.Τ).

Εστω $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ και $V \subseteq \mathbb{R}^n$ και

$F : I \times V \to \mathbb{R}^n$ συνεχης η οποια ικανοποιει τη συνθηκη Lipschitz στο $I \times V$. Τοτε υπαρχει το πολύ μια λυση της Δ.Ε $u'(t) = F(t, u(t))$ με αρχικη συνθηκη $u(t_0) = c \in V$